Notes of Topological Insulators and Topological Superconductors

1^{st} edition

Laserdog

Published by Non

http://laserroger.github.io/LaserPublic/Academic_and_Research/TINOTE.pdf

Contents

Preface

Preface

完全基于 [1] 这本书。部分参考 [2]。基本的量子力学知识是基础，包含但不限于 Dirac 符号、绝热近似、微扰论。拓扑知识和微分几何知识不必要但会帮助理解。

以及，说是 Notes，感觉更像翻译。。不过我自己早就完全深入理解的东西我就不会继续 type 了。以上

II 预备内容

1. Berry 相

首先，我们引入 Berry 相是由于我们希望了解到一个系统的哈密顿量如果随时间变化缓慢的话，初始若体系位于某一本征态的话体系怎么演化。

首先，假设我们有一个缓慢变化的哈密顿量参数 $\mathbf{R(t)}$，哈密顿量 $\mathcal{H}(\mathbf{R})$。那么，按照绝热定理，初始在本征态演化后还一直在本征态，但是能量之类的会变化。

首先，我们有本征态方程

$$\mathcal{H}(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle \tag{1.1}$$

而薛定谔方程告诉我们

$$\mathcal{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \tag{1.2}$$

我们知道我们的态肯定是本征态，但是携带一个辐角 $\theta(t)$。把 $|\psi(t)\rangle = e^{-i\theta(t)}|n(\mathbf{R})\rangle$ 带入 (1.1)，我们有

$$E_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|n(\mathbf{R})\rangle = \hbar\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)|n(\mathbf{R})\rangle + i\hbar\frac{d}{dt}|n(\mathbf{R})\rangle \tag{1.3}$$

假定 $|n(\mathbf{R})\rangle$ 归一，即 $\langle n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = 1$，我们就有

$$E_n(\mathbf{R}(t)) = \hbar\frac{d}{dt}\theta(t) + i\hbar\left\langle n(\mathbf{R})\middle|\frac{d}{dt}\middle|n(\mathbf{R})\right\rangle \tag{1.4}$$

我们想看 $\theta(t)$ 究竟是什么，利用 (1.4)，我们很容易得到

$$\theta(t) - \theta(0) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(\mathbf{R}(t'))dt' - i\int_0^t \left\langle n(\mathbf{R}(t'))\middle|\frac{d}{dt'}\middle|n(\mathbf{R}(t'))\right\rangle dt' \tag{1.5}$$

这里，第一项和我们熟知的动力学相位（$e^{-i\omega t}$）一样，而第二项是一个很奇怪的东西。我们把它称为*几何相位*，或者*Berry Phase*。为什么叫几何相位呢？通过接下来的推导我们会发现，这样一个相位实际上是由你如何在参数空间 $\mathbf{R}$ 上变化的*几何路径*决定的。我们对这个第二项做一个记号，叫 $-\gamma_n$，则

$$\gamma_n = i\int_0^t \left\langle n(\mathbf{R}(t'))\middle|\frac{d}{dt'}\middle|n(\mathbf{R}(t'))\right\rangle dt' = i\int_0^t \left\langle n(\mathbf{R}(t'))\middle|\frac{d}{d\mathbf{R}}\frac{d\mathbf{R}}{dt'}\middle|n(\mathbf{R}(t'))\right\rangle dt' \quad (1.6)$$

显然我们可以把 $d\mathbf{R}/dt'$ 提出来，因为这并不对于一个 $\mathbf{R}$ 的函数造成任何的操作，只是起到一个数的作用。因此

$$\gamma_n = i\int_{\mathbf{R}(\mathbf{0})}^{\mathbf{R}(t)} \left\langle n(\mathbf{R})\middle|\frac{d}{d\mathbf{R}}\middle|n(\mathbf{R})\right\rangle d\mathbf{R} = i\int_{c_{\mathbf{R}}} \langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle\, d\mathbf{R} \quad (1.7)$$

当然也可以写成如下形式

$$\gamma_n = -\mathbf{Im}\int_{c_{\mathbf{R}}} \langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle\, d\mathbf{R}$$

而且，如果我们定义

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = i\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle$$

则利用高斯定理，我们有

$$\gamma_n = \int_{c_{\mathbf{R}}} d\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \quad (1.8)$$

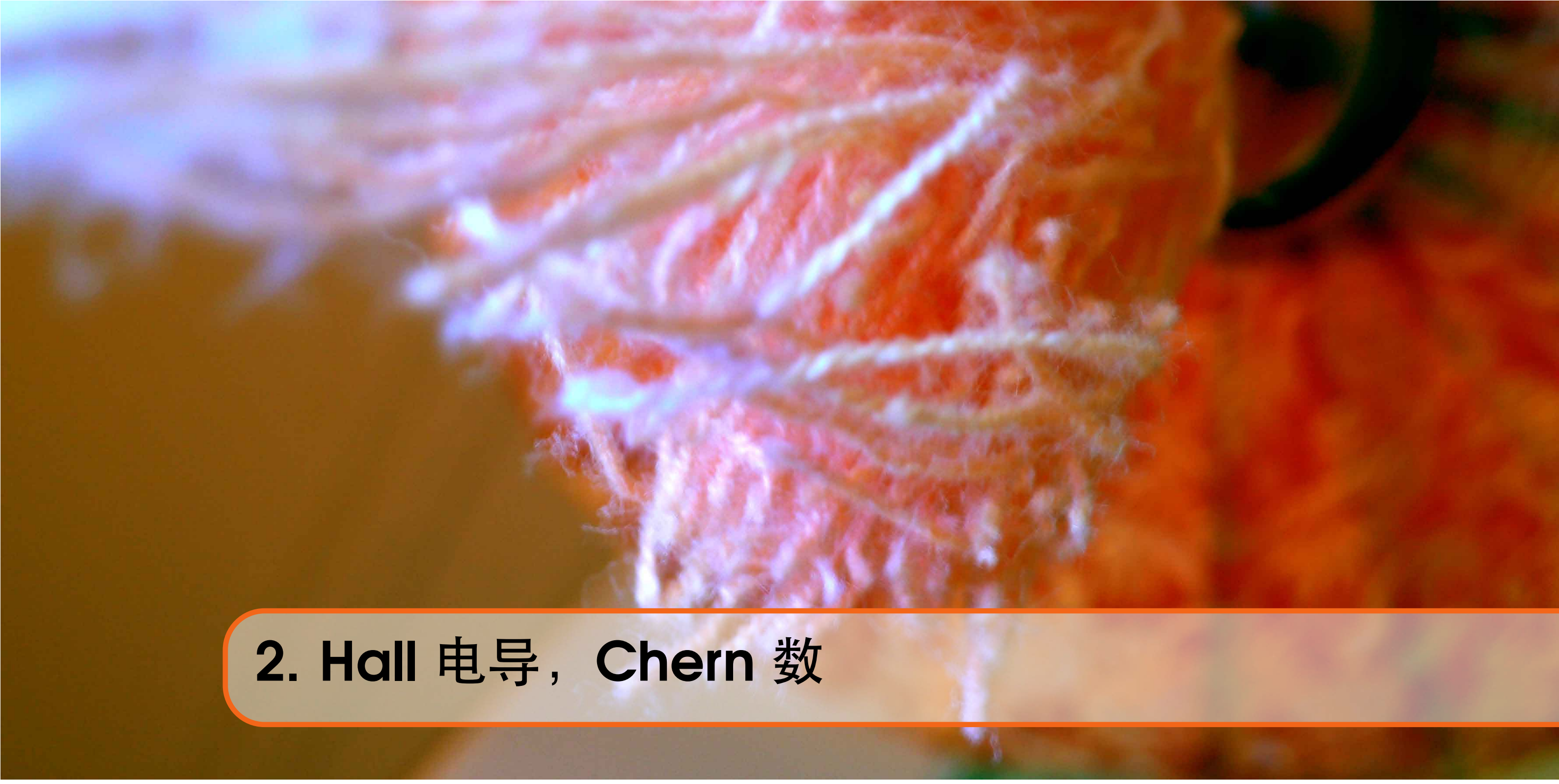
而另一方面，如果给这个 $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ 加上一个 gauge 项，也就是说增加一个

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\xi(\mathbf{R})$$

并不改变绕一圈的 Berry 相位大小，因为附加的项的圈积分为 $\xi(\mathbf{R}(0)) - \xi(\mathbf{R}(T)) = 0$。因此，如果本身这个 Berry 相位积分不为 0 的话，依靠这个 gauge 改变仍然不能改变这样一个本征的 Berry 相位。

接下来，我们基本上会考虑一个三维的参数空间 R_1, R_2, R_3。更高维度的唯一不同就在于叉乘的定义是怎样的（按照行列式那样定义就可以）。既然是三维的，那么我们利用 Stokes 定理得到

$$\begin{aligned}\gamma_n &= -\mathbf{Im}\int_{c_{\mathbf{R}}} d\mathbf{S}\cdot(\nabla\times\langle n(\mathbf{R})|\nabla|n(\mathbf{R})\rangle) \\ &= -\mathbf{Im}\int_{c_{\mathbf{R}}} dS_i\varepsilon_{ijk}\nabla_j\,\langle n(\mathbf{R})|\nabla_k|n(\mathbf{R})\rangle \\ &= -\mathbf{Im}\int_{c_{\mathbf{R}}} d\mathbf{S}\cdot(\langle\nabla n(\mathbf{R})|\times|\nabla n(\mathbf{R})\rangle)\end{aligned} \quad (1.9)$$



2. Hall 电导，Chern 数

Bibliography

[1] B Andrei Bernevig. *Topological insulators and topological superconductors*. Princeton University Press, 2013.

[2] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83:1057–1110, Oct 2011.